平面上に原点 O を中心とする半径 r の円 C と点 $\mathrm{A}(r\,,0)$ がある. y 軸に平行な直線 $x=r$ 上に点 $\mathrm{P}(r\,,t)$ をとる. ただし, $t\neq 0$ とする.

(1) 点 P を通り, 円 C と接する直線で直線 PA と異なるものを l とする. l と円 C との接点を T とするとき, 点 T の座標を $r,\ t$ を用いて表せ.

xy 平面上における図形の表現には大きく分けて 2 つの方法があります.

『パラメータ表示』$\cdots$ その図形上の全ての点の座標を表すことによって図形を表現する.

『方程式』　　　$\cdots$ 点 $(x,\,y)$ がその図形上にのっているための x と y の条件によって図形を表現する.

どちらも図形上に点 $(x\,,y)$ がのるための必要十分条件という意味においては結局同じなのですが, 意識することは大切です.

例) 2 点 $\mathrm{A}(-2\,,3)$, $\mathrm{B}(1\,,2)$ を通る直線 l に対し,

『パラメータ表示』は

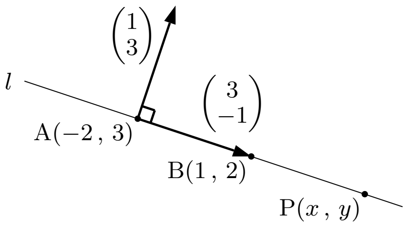
$$l:\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\iff\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\quad(t\in\mathbb{R})$$

となり, 「**l 上の点 P は全て $(-2+3t\,,\,3+t)$ で表される点である**」を意味します.

『方程式』は

$$\mathrm{P}(x,\,y)\in l\iff\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}\iff\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}\iff(x+2)+3(y-3)=0$$

となり, 「**l 上の点 $\mathrm{P}(x\,,\,y)$ は全て $(x+2)+3(y-3)=0$ を満たす点である**」を意味します.



この意識の違いは 点という図形 を求める上でも重要です.

(解答)

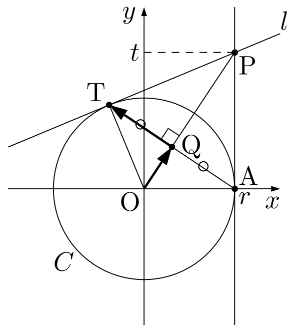
(1) **【方針 1】垂直を活かして $\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を求める.**

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}r\\0\end{pmatrix}\text{の}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}r\\t\end{pmatrix}\text{への正射影ベクトル}\right)=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{r^2}{r^2+t^2}\begin{pmatrix}r\\t\end{pmatrix}$$

より $\overrightarrow{\mathrm{QT}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{r^2}{r^2+t^2}\begin{pmatrix}r\\t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}r\\0\end{pmatrix}=\dfrac{rt}{r^2+t^2}\begin{pmatrix}-t\\r\end{pmatrix}$.

よって $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QT}}=\dfrac{r^2}{r^2+t^2}\begin{pmatrix}r\\t\end{pmatrix}+\dfrac{rt}{r^2+t^2}\begin{pmatrix}-t\\r\end{pmatrix}=\dfrac{r}{r^2+t^2}\begin{pmatrix}r^2-t^2\\2rt\end{pmatrix}$

より $\boxed{\mathrm{T}\left(\dfrac{r(r^2-t^2)}{r^2+t^2}\,,\,\dfrac{2r^2t}{r^2+t^2}\right)}$

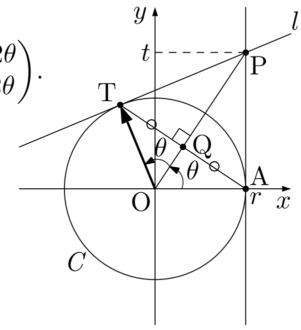


【方針 2】円周上の点であることを活かして $\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を求める.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の x 軸正方向からの回転角を θ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<0,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと, $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=r\begin{pmatrix}\cos 2\theta\\\sin 2\theta\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\text{P の }x\text{ 座標}}{\mathrm{OP}}=\dfrac{r}{\sqrt{r^2+t^2}}\\\sin\theta=\dfrac{\text{P の }y\text{ 座標}}{\mathrm{OP}}=\dfrac{t}{\sqrt{r^2+t^2}}\end{cases}\text{なので,}\begin{cases}\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\dfrac{r^2-t^2}{r^2+t^2}\\\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2rt}{r^2+t^2}\end{cases}$$

より $\boxed{\mathrm{T}\left(\dfrac{r(r^2-t^2)}{r^2+t^2}\,,\,\dfrac{2r^2t}{r^2+t^2}\right)}$



【方針 3】T が l と C の両方に含まれる点であるための条件を求める.

$\mathrm{T}(p\,,q)$ とおくと, C 上の点なので, $p^2+q^2=r^2\cdots$① が成り立つ.

次に, $l:px+qy=r^2$ であり, これが $\mathrm{P}(r\,,t)$ を通るので, $rp+tq=r^2\cdots$② が成り立つ.

$$\begin{cases}(p,\,q)\in C\\(p,\,q)\in l\end{cases}\iff\begin{cases}①\\②\end{cases}\iff\begin{cases}p^2+\left(\dfrac{r^2-rp}{t}\right)^2=r^2\\q=\dfrac{r^2-rp}{t}\quad(t\neq 0\text{ より})\cdots②'\end{cases}$$

$$\iff(r^2+t^2)p^2-2r^3p+r^4-r^2t^2=0\wedge②'$$

$$\iff\underbrace{(p-r)\{(r^2+t^2)p-(r^3-rt^2)\}}_{\text{点 A も }C\text{ と }l\text{ の交点なので, }(p-r)\text{ を因数に持つことは分かっている}}=0\wedge②'$$

$$\iff(p,\,q)=(r,\,0),\ \left(\frac{r^3-rt^2}{r^2+t^2},\ \frac{2r^2t}{r^2+t^2}\right)$$

$\mathrm{T}\neq\mathrm{A}$ より $\boxed{\mathrm{T}\left(\dfrac{r(r^2-t^2)}{r^2+t^2}\,,\,\dfrac{2r^2t}{r^2+t^2}\right)}$