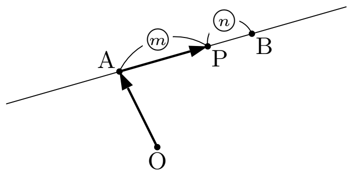
異なる 2 点 A, B と正の数 $m,\ n$ に対し,
点 P が AB を $m:n$ に内分するとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
点 P が AB を $m:n\ (m\neq n)$ に外分するとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{-n}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
が成り立つ. この 2 つの公式を 1 つに統一する方法を考えよ.

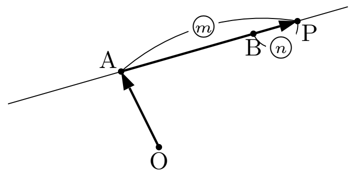
【まず公式の証明】

(i) $m:n$ に内分するとき,



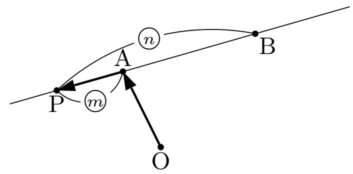
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\\&=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

(ii) $m:n\ (m>n)$ に外分するとき,



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m-n}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\\&=\frac{-n}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

(iii) $m:n\ (m<n)$ に外分するとき,



(ii) において A と B, m と n をそれぞれ入れ替えたものなので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\frac{-m}{n-m}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{n}{n-m}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\frac{n}{-m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{-m}{-m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

(あえて (ii) の形にはしないでおく)

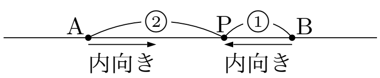
【次に公式の統一】

一口に AB を分割すると言っても P が線分 AB 内にあるか, 延長上にあるかを区別するのに「内分」「外分」という 2 つの言葉を使い分けなければいけませんでした.

ここで「符号付きの比」を定義することにより言葉を統一できるようになるのです.

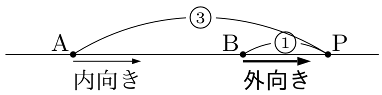
「内分」で統一する場合, A, B から見て P が内向きにあるとき比は正なので, 外向きにあるときに逆向きを意味する負の比と定めるのが自然です. この定義で内分公式を使うと以下のようになります.

(i)′ $2:1$ に内分するとき,



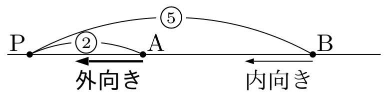
これは今まで通り
「$+2:+1$ に内分」と解釈する.
よって内分公式より
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{2+1}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(ii)′ $3:1$ に外分するとき,



これは
「$+3:-1$ に内分」と解釈する.
よって内分公式より
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{-1}{3-1}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{3}{3-1}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(iii)′ $2:5$ に外分するとき,



これは
「$-2:+5$ に内分」と解釈する.
よって内分公式より
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{5}{-2+5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{5}{-2+5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

となり, (ii)′, (iii)′ の結果は上で証明した公式 (ii), (iii) を満たしているので, この解釈により分点公式は内分公式の 1 つに統一されました.

分点公式

A, B から見て P が内向きにあるときは正, 外向きにあるときは負と定める符号付きの比によって
AB を $M:N$ ($M,\ N$ は実数で $M+N\neq 0$) に内分するとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{N}{M+N}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{M}{M+N}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

【メッセージ】

数学の世界では正の数だけではバラバラだったものに「負の数」を導入したり、実数だけではバラバラだったものに「虚数」を導入することによって, その表現が統一できてしまうものがたくさんあります.
つまり「負の数」や「虚数」は一見異なるものに潜む本質的な一致を, 見えるところまで浮上させてくれる道具なのです.
ここに純粋に数学の美しさを感じますし, 一方で物理などで数学を道具として利用するためには必要な理解でもあります.
私たちは生徒の皆さんに, 問題を解くだけでは大学入学後に数学を理解も利用もできないことを知ってもらい, そうならないための正しい学びの方向付けを行っています.