3 以上の自然数 n に対し, $x^n + 2y^n = 4z^n \cdots$ ① を満たす自然数 $x,\ y,\ z$ が存在しないことを示せ.

【解答】

まず, ①が自然数解 (x_0, y_0, z_0) を持つと仮定すると, ${x_0}^n + 2{y_0}^n = 4{z_0}^n \cdots$ ①′

①′ $\Longrightarrow {x_0}^n \equiv 0 \pmod 2$

$\quad\Longleftrightarrow x_0 \equiv 0 \pmod 2$

より $x_0 = 2x_1\ (x_1 \in \mathbb{N})$ とおける.

このとき ①′ $\Longleftrightarrow 2^n {x_1}^n + 2{y_0}^n = 4{z_0}^n$

$\qquad\qquad\Longleftrightarrow 2^{n-1}{x_1}^n + {y_0}^n = 2{z_0}^n \cdots$ ①″

①″ $\Longrightarrow {y_0}^n \equiv 0 \pmod 2$ $(n-1 \geqq 2$ より$)$

$\quad\Longleftrightarrow y_0 \equiv 0 \pmod 2$

より $y_0 = 2y_1\ (y_1 \in \mathbb{N})$ とおける.

このとき ①″ $\Longleftrightarrow 2^{n-1}{x_1}^n + 2^n {y_1}^n = 2{z_0}^n$

$\qquad\qquad\Longleftrightarrow 2^{n-2}{x_1}^n + 2^{n-1}{y_1}^n = {z_0}^n \cdots$ ①‴

①‴ $\Longrightarrow {z_0}^n \equiv 0 \pmod 2$ $(n-2 \geqq 1$ より$)$

$\quad\Longleftrightarrow z_0 \equiv 0 \pmod 2$

より $z_0 = 2z_1\ (z_1 \in \mathbb{N})$ とおける.

このとき ①‴ $\Longleftrightarrow 2^{n-2}{x_1}^n + 2^{n-1}{y_1}^n = 2^n {z_1}^n$

$\qquad\qquad\Longleftrightarrow {x_1}^n + 2{y_1}^n = 4{z_1}^n$

よって (x_1, y_1, z_1) も①の自然数解であり, $x_0 > x_1,\ y_0 > y_1,\ z_0 > z_1$ を満たす.

同様な操作を繰り返すと,

$x_1 > x_2,\ y_1 > y_2,\ z_1 > z_2$ を満たす①の自然数解 (x_2, y_2, z_2),

$x_2 > x_3,\ y_2 > y_3,\ z_2 > z_3$ を満たす①の自然数解 (x_3, y_3, z_3),

$\quad\vdots$

のように, いくらでも小さい①の自然数解が存在することになるが, 自然数には最小値が存在することに矛盾する.

以上より①を満たす自然数 $x,\ y,\ z$ は存在しないことが示された.

無限降下法

上のように命題 $P(n)$ を真にする自然数 n が存在しないことを示す際に,

$$P(n_0) \text{ を真にする自然数 } n_0 \text{ が存在する} \Longrightarrow P(n_1) \text{ を真にする自然数 } n_1\ (< n_0) \text{ が存在する}$$

を示せば, $P(n)$ を満たすいくらでも小さい自然数が存在することになり, 自然数に最小値が存在することに矛盾します.

このような証明方法を「無限降下法」といいます.

無限降下法は整数問題ではたびたび登場する証明法であり,

素数 p に対し, p が 2 つの平方数の和で表せる $\Longleftrightarrow p \equiv 1 \pmod 4$ または $p = 2$

$x^4 + y^4 = z^4$ を満たす自然数 $x,\ y,\ z$ は存在しない. (有名なフェルマーの定理の一部)

ユークリッドの互除法によって必ず最大公約数を求めることができる.

など, 興味深くかつ中学生でも挑戦できるような様々な問題で活躍します.

【補足】

上の問題は大学入試問題ですが, その主張はフェルマーの定理

3 以上の自然数 n に対し, $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数 $x,\ y,\ z$ は存在しない.

によく似ています.

また $x^2 + y^2 = z^2$ を満たす互いに素な自然数 $x,\ y,\ z$ (ピタゴラス数) が無数に存在するのと同様に,

$n = 2$ のときの①である $x^2 + 2y^2 = 4z^2$ を満たす互いに素な自然数 $x,\ y,\ z$ も無数に存在することも示せます.

このように大学入試ではフェルマーの定理やピタゴラス数に関わる問題が様々に形を変えて出題されています.

夏期講習【有名トピック研究】では大学入試問題も題材に, その背景を手持ちの道具でできる限り掘り下げていきます.

例えば上記の問題に関連しては, 全てのピタゴラス数を求める方法なども探求します.