1 辺が 3 の立方体を斧で切り分けて 1 辺が 1 の立方体 27 個にするには最低何回斧を振るえばよいか？ただし, 切った破片同士を重ねることにより, 一振りでいくつかの破片を切ることができるものとする.

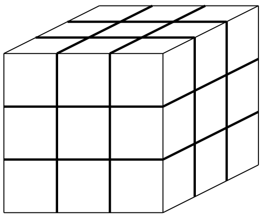
最大最小の基礎

$$f(x)\text{ の最小値が } m \iff \begin{cases} f(x)\text{ は } m \text{ 以上の値しかとらない} & (\forall x,\ f(x) \geqq m) \quad \cdots Ⓐ \\ f(x)\text{ は } m \text{ になることがある} & (\exists x,\ f(x) = m) \quad \cdots Ⓑ \end{cases}$$

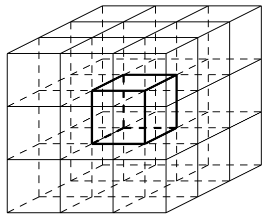
答は 6 回ですが, 6 回でできること (Ⓑ) を述べるだけでは 0 点です.
5 回以下では不可能であること (Ⓐ) を述べて初めて 6 回が最小と示したことになるのです.

【解答】

(i) 立方体に真上から 4 回, 側面から 2 回斧を振るうことにより, 1 辺が 1 の立方体を 27 個作ることができるので, 6 回でできる.



(ii) 次に, 元々中心にあった 1 辺が 1 の立方体は 6 面全てが切断によって生まれる面であり, どの 2 面も同時に生み出すことはできないので最低でも 6 回かかる.



(i),(ii) より, 最低 6 回かかりかつ 6 回で可能なので求める最小の回数は 6 回.

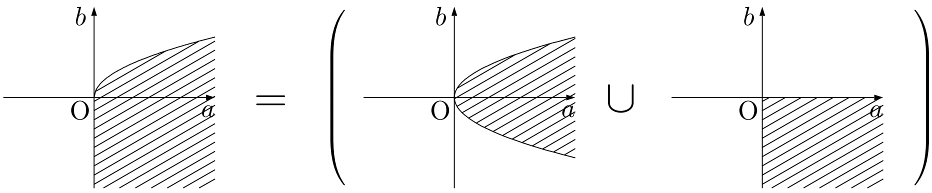
$\sqrt{x^2+y^2-2} \geqq x+y$ で表される図形を xy 平面に図示せよ.

まず $\sqrt{a} \geqq b$ を $\sqrt{\quad}$ をはずした形に同値変形する方法を考えます.

条件の同値変形の基礎

条件 P, Q に対し, P と Q の真理集合が一致するとき「P と Q は同値である」といい, 「$P \iff Q$」と書く.

$\sqrt{a} \geqq b$ と, 両辺を単に 2 乗しただけの $a \geqq b^2$ の真理集合 (この場合は不等式が表す ab 平面上の図形) を見比べてみます.



上図より

$$\boldsymbol{\sqrt{a} \geqq b \iff a \geqq b^2 \vee [\, a \geqq 0 \wedge b \leqq 0 \,]}$$ (「$\vee$」は「または」, 「$\wedge$」は「かつ」を意味する)

という同値変形が手に入ります. $\sqrt{a} = b$, $\sqrt{a} \leqq b$ なども同様に変形できます.

真理集合を図示すれば目で見て同値かどうかがはっきりわかるので, 自信を持って同値変形できるのです.

無意味な暗記や自信の持てない根拠での変形では正しいかが怪しいだけでなく, 応用も利きません.

【解答】

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2-2} \geqq x+y &\iff x^2+y^2-2 \geqq (x+y)^2 \vee [\, x^2+y^2-2 \geqq 0 \wedge x+y \leqq 0 \,] \\ &\iff xy \leqq -1 \vee [\, x^2+y^2 \geqq 2 \wedge x+y \leqq 0 \,] \end{aligned}$$

よって右図斜線部. 境界は含む.