$2 = 10^{\alpha}$ を満たす実数 α を小数第 2 位まで求めよ. ただし, 電卓の $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt{}$ の演算は使用してよい.

2 と 10 のべき乗の比較により α を挟もうというのが方針です.

n	2^n
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192

【解答】

右表より $\begin{cases} 8192 < 10000 \\ 1024 > 1000 \end{cases} \iff \begin{cases} 2^{13} < 10^4 \\ 2^{10} > 10^3 \end{cases} \iff 10^{\frac{3}{10}} < 2 < 10^{\frac{4}{13}}$

$$\Longrightarrow 10^{0.3} < 10^{\alpha} < 10^{0.31} \iff 0.3 < \alpha < 0.31$$

よって α の小数第 2 位までの値は $\boxed{0.30}$

($2 = 10^{\alpha}$ を満たす実数 α は「2 の常用対数」と呼ばれ $\log_{10} 2$ と書きます. 無理数であり,

$$\log_{10} 2 = 0.301029\cdots$$

となります.)

【メッセージ】

読んでしまえばなんていうことのない解答です.

$\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010$ は見たことがあるのに, 0.30 すら求められなかったという人は勉強の仕方を根本的に間違っていると言えるでしょう. **『$\sqrt{}$』や『log』などの記号で表される数や, 『円周率 π』, 『自然対数の底 e』などの有名な定数の近似値を求めよと言われたときに, 冷静に定義に戻って作業ができる力は必要不可欠です.**

かつて東大入試で「円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ. 」という問題が出題されたことからも分かるように, 大学が学生に要求する力でもあるのです. このメッセージをしっかり受け取ってほしいと願います.

【探究】

より精度の高い常用対数を得るためには上の手法は効率がよくありません.

そもそも 16 世紀〜17 世紀, 天文学や航海術, 金融業の進展に伴って巨大な数の積やべき乗計算をスピーディーに行えることが必要となりました. このために考え出されたのが対数と言われています. その原理の構築に大きく貢献したのがネイピア (1550 − 1617) であり, 現在の常用対数を完成させたのがブリッグス (1561 − 1631) です. ブリッグスの手法も 2^{α} と 10^{β} の比較から始まるのですが, 1 次近似などの近似手法を利用することによりコンピュータのない時代に小数点以下十数桁まで正確に求めたと言います.

1 次近似は微分を理解する上でも欠かせない発想です. 授業ではブリッグスの功績の跡をたどって 2 の常用対数を求めるといったこともしていきます.

異なる実定数 $p,\ q,\ r$ に対し, 以下の x の多項式 $f(x)$ を整理せよ.

$$f(x)=p^2\frac{(x-q)(x-r)}{(p-q)(p-r)}+q^2\frac{(x-r)(x-p)}{(q-r)(q-p)}+r^2\frac{(x-p)(x-q)}{(r-p)(r-q)}$$

まともに展開整理はしたくありません. 具体的な値を代入して式の情報を得るのはよく使う手法ですが, その情報を正しく使えるかがカギです.

【解答】

$f(p)=p^2,\ f(q)=q^2,\ f(r)=r^2$ より 2 次以下の多項式 $f(x)$ と x^2 が異なる 3 個の値について一致するので,
多項式一致の定理より $\boxed{f(x)=x^2}$

【メッセージ】

あなたは単なる予想・推論と, 正しく積み重ねられた論理の違いをはっきり区別できていますか？
今回 $f(p)=p^2,\ f(q)=q^2,\ f(r)=r^2$ に気づいたとしても, それだけから $f(x)=x^2$ と結論づけてしまったら 0 点です.

(例えば, $f(x)=p^4\dfrac{(x-q)(x-r)}{(p-q)(p-r)}+q^4\dfrac{(x-r)(x-p)}{(q-r)(q-p)}+r^4\dfrac{(x-p)(x-q)}{(r-p)(r-q)}$ は $f(p)=p^4,\ f(q)=q^4,\ f(r)=r^4$ を満たしますが, $f(x)=x^4$ ではありません.)

「値としての一致」から「多項式としての一致」を導くのに欠かせないのが『多項式一致の定理』です.

多項式一致の定理

n 次以下の多項式 $f(x),\ g(x)$ および, 異なる $n+1$ 個の値 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\alpha_{n+1}$ に対し,

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(\alpha_1)&=&g(\alpha_1)\\ f(\alpha_2)&=&g(\alpha_2)\\ &\vdots&\\ f(\alpha_{n+1})&=&g(\alpha_{n+1})\end{array}\right. \iff f(x)\text{ と }g(x)\text{ は多項式として一致する}$$

(証明) (i) $\Longrightarrow$ 向きを示す.
$F(x)=f(x)-g(x)$ とおくと仮定より
異なる $n+1$ 個の値 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\alpha_{n+1}$ に対し, $F(\alpha_1)=F(\alpha_2)=\cdots=F(\alpha_{n+1})=0$ が成り立つので,
因数定理より

$$F(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n+1})Q(x)\quad (Q(x)\text{ は多項式})$$

と表せる.
$f(x),\ g(x)$ が n 次以下であることから $F(x)$ は n 次以下の多項式なので $Q(x)=0$.
以上より $F(x)=0$ すなわち $f(x)=g(x)$ であることが示された.

(ii) $\Longleftarrow$ 向きは当たり前.

一度は解いたことのある問題の中から『多項式一致の定理』が議論のカギとなるものをもう 1 問紹介します.

$$\frac{p}{x}+\frac{q}{x+1}+\frac{r}{x-1}=\frac{x-3}{x(x+1)(x-1)}\cdots①$$

が恒等式となるような定数 $p,\ q,\ r$ の値を求めよ.

(よく見る答案) ①の分母を払って $p(x+1)(x-1)+q(x-1)x+rx(x+1)=x-3$ とし,
$x=0$ を代入して $\boxed{p=3}$, $x=-1$ を代入して $\boxed{q=-2}$, $x=1$ を代入して $\boxed{r=-1}$

といった答案を見たことは, または書いたことはありませんか？
そもそも「①が恒等式である」とは「①が $x=0,\ -1,\ 1$ 以外の全ての数において成り立つ」ということです. 代入できないはずの数を代入してしまっていることに気持ち悪さを感じず「こういうものだ」と思考停止し, 次の問題へと急かされている生徒が多いように見えるのが心配です. **たとえ先生から教わったことでも論理的におかしいと思ったことは見逃さないで考え抜く姿勢を持つことを, 理系を目指す学生には特に望みます.**

【解答】

① $\iff \dfrac{p(x+1)(x-1)+q(x-1)x+rx(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=\dfrac{x-3}{x(x+1)(x-1)}$

であり，

$f(x)=p(x+1)(x-1)+q(x-1)x+rx(x+1)$

$g(x)=x-3$

とおくと，

①が恒等式 $\iff$ ①が $x=0,\ -1,\ 1$ 以外の全ての数で成り立つ．

$\iff f(x)=g(x)$ が $x=0,\ -1,\ 1$ 以外の全ての数で成り立つ．

$\iff f(x)$ と $g(x)$ が多項式として一致する．

($f(x)$，$g(x)$ は 2 次以下の多項式であり，異なる 3 個以上の値で一致するので多項式一致の定理より $\Longrightarrow$ 向きも成り立つ．$\Longleftarrow$ 向きは当たり前)

$\iff f(0)=g(0)$ かつ $f(-1)=g(-1)$ かつ $f(1)=g(1)$

($f(x)$，$g(x)$ は 2 次以下の多項式なので多項式一致の定理より $\Longleftarrow$ 向きも成り立つ．$\Longrightarrow$ 向きは当たり前)

$\iff \boxed{p=3,\ q=-2,\ r=-1}$