複素数 $\alpha,\ \beta$ に対して $\alpha\beta=0$ ならば, $\alpha=0$ または $\beta=0$ であることを示せ.

(2012　早大　前期)

に対し,

$\alpha\neq 0$ とすると $\alpha\beta=0$ の両辺に $\dfrac{1}{\alpha}$ をかけて $\beta=0$

$\beta\neq 0$ とすると $\alpha\beta=0$ の両辺に $\dfrac{1}{\beta}$ をかけて $\alpha=0$

よって $\alpha=0$ または $\beta=0$ であることが示された.

は解答になっているか？

上の解答で言っていることに嘘は無いのですが, ここで問題にしたいのは

「定理を証明する際, 何を前提とすることが許されるか？」

です.

その意味で, この問題が学生達に投げかける問は重要です.

ある定理を証明する場合, 本来は定義と公理からスタートしなくてはいけません. それがあまりにも長い道のりになる場合は少なくとも示したい定理より基本的な定理のみを使うことが許されます.

今回示すべき定理は複素数の演算に関する性質としてはかなり基本的なものであるため, この問題を機会に複素数の定義および計算規則の理解度を確認しましょう.

複素数の定義

i を $i^2=-1$ を満たす数とする. 実数 $a,\ b$ に対し, $a+bi$ で表される数を複素数と定める.

$a+0i$ を実数 a と定める. (まだ $0i=0$ は当たり前ではないことに注意)

$0+bi$ を bi と書き, $b\neq 0$ のとき純虚数と呼ぶ.

続いて,「＝」「＋」「−」「×」「÷(／)」を複素数の範囲で定めます.

複素数の相等・四則演算の定義

$\alpha=a+bi,\ \beta=c+di\ (a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R})$ に対し,

(相等) $\alpha=\beta \iff a=c$ かつ $b=d$

(加法) $\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$

(減法) $\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)i$

(乗法) $\alpha\beta=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(除法) $\beta\neq 0$ のとき $\dfrac{\alpha}{\beta}=\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$

と定める.

では, この定義と実数の計算規則のみを用いて上の入試問題に解答したいと思います.

(解答 1)

まず複素数の積の結合法則と交換法則を証明する.

「そこから？」と思うかもしれませんが,
成り立つことを決めつけることはできません.

複素数 $\alpha=a_1+b_1i,\ \beta=a_2+b_2i,\ \gamma=a_3+b_3i\ \ \big(a_n,\ b_n\ (n=1,\ 2,\ 3)\in\mathbb{R}\big)$ に対し,

(交換法則) $\alpha\beta=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i\cdots①$

$\beta\alpha=(a_2a_1-b_2b_1)+(a_2b_1+b_2a_1)i\cdots②$

① = ② より $\alpha\beta=\beta\alpha$

(結合法則)
$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\gamma&=\{(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i\}(a_3+b_3i)\\&=\{(a_1a_2-b_1b_2)a_3-(a_1b_2+b_1a_2)b_3\}+\{(a_1a_2-b_1b_2)b_3+(a_1b_2+b_1a_2)a_3\}i\\&=(a_1a_2a_3-b_1b_2a_3-a_1b_2b_3-b_1a_2b_3)+(a_1a_2b_3-b_1b_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2a_3)i\cdots③\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\alpha(\beta\gamma)&=(a_1+b_1i)\{(a_2a_3-b_2b_3)+(a_2b_3+b_2a_3)i\}\\&=\{a_1(a_2a_3-b_2b_3)-b_1(a_2b_3+b_2a_3)\}+\{b_1(a_2a_3-b_2b_3)+a_1(a_2b_3+b_2a_3)\}i\\&=(a_1a_2a_3-a_1b_2b_3-b_1a_2b_3-b_1b_2a_3)+(b_1a_2a_3-b_1b_2b_3+a_1a_2b_3+a_1b_2a_3)i\cdots④\end{aligned}$$
③ = ④ より $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$

次に複素数 $\alpha=a+bi\ \ (a,\ b\in\mathbb{R})$ に対し,

(i) $\alpha\times0=0\times\alpha=0$　　(ii) $\alpha\times1=1\times\alpha=\alpha$　　(iii) $\alpha\neq0$ のとき $\alpha\times\dfrac{1}{\alpha}=1$

を示す.

(i) $\alpha\times0=(a+bi)(0+0i)=(a\cdot0-b\cdot0)+(a\cdot0+b\cdot0)i=0+0i=0$ であり, 交換法則より $0\times\alpha=0$

(ii) $\alpha\times1=(a+bi)(1+0i)=(a\cdot1-b\cdot0)+(a\cdot0+b\cdot1)i=a+bi=\alpha$ であり, 交換法則より $1\times\alpha=\alpha$

(iii) $\alpha\neq0$ のとき
$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1+0i}{a+bi}=\left(\frac{1\cdot a+0\cdot b}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{0\cdot a-1\cdot b}{a^2+b^2}\right)i=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i \text{ より}$$
$$\alpha\times\frac{1}{\alpha}=\left(a\cdot\frac{a}{a^2+b^2}-b\cdot\frac{-b}{a^2+b^2}\right)+\left(b\cdot\frac{a}{a^2+b^2}+a\cdot\frac{-b}{a^2+b^2}\right)i=1+0i=1$$

以上より,

$\alpha\neq0$ とすると
$$\begin{aligned}\alpha\beta=0&\Longrightarrow(\alpha\beta)\times\frac{1}{\alpha}=0\times\frac{1}{\alpha}\\&\Longleftrightarrow(\alpha\beta)\times\frac{1}{\alpha}=0\ \ \big(\text{(i)より}\big)\\&\Longleftrightarrow\beta\left(\alpha\times\frac{1}{\alpha}\right)=0\ \ \big(\text{交換法則, 結合法則より}\big)\\&\Longleftrightarrow\beta\times1=0\ \ \big(\text{(iii)より}\big)\\&\Longleftrightarrow\beta=0\ \ \big(\text{(ii)より}\big)\end{aligned}$$
$\beta\neq0$ とすると同様に $\alpha=0$

よって $\alpha=0$ または $\beta=0$ であることが示された.

結論

こうしてみると, 最初の解答が如何に多くの定理に支えられていたかが分かります.
これらを無条件に認めてしまったら何も示していないのと一緒です.
以上より「解答になっているか？」という問に対する私たちの回答は**「解答になっていない.」**です.

複素数の演算規則を必要とする (解答 1) よりもさっさと実数の演算に持ち込む次の (解答 2) の方がずっとシンプルです.

(解答 2)

$\alpha=a+bi,\ \beta=c+di\ \ (a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R})$ とおくと,

$$\begin{aligned}
\alpha\beta=0 &\iff (a+bi)(c+di)=0\\
&\iff (ac-bd)+(ad+bc)i=0\ \ (\text{複素数の積の定義より})\\
&\iff ac-bd=0\ \text{かつ}\ ad+bc=0\ \ (\text{複素数の相等の定義より})\\
&\implies (ac-bd)^2+(ad+bc)^2=0\\
&\iff a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2=0\\
&\iff (a^2+b^2)(c^2+d^2)=0\\
&\iff a^2+b^2=0\ \text{または}\ c^2+d^2=0\ \ (a^2+b^2,\ c^2+d^2\in\mathbb{R}\ \text{より})\\
&\iff a=b=0\ \text{または}\ c=d=0\ \ (a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}\ \text{より})\\
&\iff \alpha=0\ \text{または}\ \beta=0\ \ (\text{複素数の相等の定義より})
\end{aligned}$$

さらに深い理解を求めて

改めて定義を眺め, 以下の問に挑んでみてください.

複素数の定義

i を $i^2=-1$ を満たす数とする. 実数 $a,\ b$ に対し, $a+bi$ で表される数を複素数と定める.
$a+0i$ を実数 a と定める.
$0+bi$ を bi と書き, $b\neq 0$ のとき純虚数と呼ぶ.

複素数の相等・四則演算の定義

$\alpha=a+bi,\ \beta=c+di\ (a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R})$ に対し,

(相等) $\alpha=\beta \quad\iff\quad a=c$ かつ $b=d$

(加法) $\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$

(減法) $\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)i$

(乗法) $\alpha\beta=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(除法) $\beta\neq 0$ のとき $\dfrac{\alpha}{\beta}=\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$

と定める.

これを何の疑問もなく受け入れた人もいるかもしれませんが, 加法の定義一つ見ても

$$\alpha\underbrace{+}_{\text{複素数同士の和}}\beta\quad=\quad(a\underbrace{+}_{\substack{\text{実数同士}\\\text{の和}}}c)\underbrace{+}_{\substack{\text{複素数の定義に}\\\text{含まれる記号}}}(b\underbrace{+}_{\substack{\text{実数同士}\\\text{の和}}}d)i$$

のように意味づけが異なる「$+$」が混在しているのです.

問 1

上の定義が実数同士の相等・四則演算と矛盾しないことを証明せよ.

ところで複素数 $a+bi$ の定義中の b と i の関係は乗法であり, a と bi の関係は加法なのでしょうか？
また, 複素数の積を定義する前に「i^2」と書くこと自体とても気持ち悪くはないですか？
結局つじつまが合うから「$+$」や「$\times$」や「i^2」に問題は無いのですが, その点を整理してみましょう.

問 2

(1) $i=1i$ と定めると, 積の定義より $i^2=-1$ が導けることを証明せよ.

(2) 実数 b に対し, 1 つの複素数 bi は 2 つの複素数 b と i の積であることを証明せよ.

(3) 実数 $a,\ b$ に対し, 1 つの複素数 $a+bi$ は 2 つの複素数 a と bi の和であることを証明せよ.

解答は次頁です.

（問１解答）

混乱を防ぐため, 新しく定義された複素数同士の相等・四則演算を ⊜, $\oplus$, $\ominus$, $\odot$, ⨸ と書き分けることにします.
複素数 $a,\ c\ (a,\ c \in \mathbb{R})$ に対し,

(相等)　$a \mathbin{⊜} c \iff (a+0i) \mathbin{⊜} (c+0i) \iff a=c$ かつ $0=0$ （複素数の相等の定義より）
$\iff a=c$

以下, 複素数同士の相等も $=$ で表すことにします.

(加法)　$a \oplus c = (a+0i) \oplus (c+0i) = (a+c)+(0+0)i$ （複素数の加法の定義より）
$= (a+c)+0i$
$= a+c$

(減法)　$a \ominus c = (a+0i) \ominus (c+0i) = (a-c)+(0-0)i$ （複素数の減法の定義より）
$= (a-c)+0i$
$= a-c$

(乗法)　$a \odot c = (a+0i) \odot (c+0i) = (a\cdot c - 0\cdot 0)+(a\cdot 0 + 0\cdot c)i$ （複素数の乗法の定義より）
$= a\cdot c + 0i$
$= a\cdot c$

(除法)　$c \neq 0$ のとき

$a \mathbin{⨸} c = (a+0i) \mathbin{⨸} (c+0i) = \left(\dfrac{a\cdot c + 0\cdot 0}{c^2+0^2}\right) + \left(\dfrac{0\cdot c - a\cdot 0}{c^2+0^2}\right)i$ （複素数の除法の定義より）
$= \dfrac{a}{c} + 0i$
$= a \div c$

（問２解答）

(1)　$i^2 = (1i)^2 = (0+1i)(0+1i) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1)+(0\cdot 1 + 1\cdot 0)i$ （複素数の乗法の定義より）
$= -1+0i$
$= -1$

(2), (3) の解答では混乱を防ぐため複素数の定義 $a+bi\ (a,\ b\in\mathbb{R})$ を $a \mathbin{\hat{+}} b \mathbin{\hat{\cdot}} i\ (a,\ b\in\mathbb{R})$ と書き分けることにします.

(2)　$b\cdot i = (b \mathbin{\hat{+}} 0 \mathbin{\hat{\cdot}} i)\cdot(0 \mathbin{\hat{+}} 1 \mathbin{\hat{\cdot}} i) = (b\cdot 0 - 0\cdot 1) \mathbin{\hat{+}} (b\cdot 1 + 0\cdot 0) \mathbin{\hat{\cdot}} i$ （複素数の乗法の定義より）
$= 0 \mathbin{\hat{+}} b \mathbin{\hat{\cdot}} i$
$= b \mathbin{\hat{\cdot}} i$

　より $b \mathbin{\hat{\cdot}} i$ は b と i の積であることが示された.

(3)　$a + b \mathbin{\hat{\cdot}} i = (a \mathbin{\hat{+}} 0 \mathbin{\hat{\cdot}} i) + (0 \mathbin{\hat{+}} b \mathbin{\hat{\cdot}} i) = (a+0) \mathbin{\hat{+}} (0+b) \mathbin{\hat{\cdot}} i$ （複素数の加法の定義より）
$= a \mathbin{\hat{+}} b \mathbin{\hat{\cdot}} i$

　より $a \mathbin{\hat{+}} b \mathbin{\hat{\cdot}} i$ は a と $b \mathbin{\hat{\cdot}} i$ の和であることが示された.

(1) より, 複素数の定義において「$i^2=-1$ とする」の代わりに「$i=1i$ と定める」とすれば積を定義する前に i^2 などというものを書かずに済むことが分かりました. また, (2), (3) より, 複素数を定義する段階では $a \mathbin{\hat{+}} b \mathbin{\hat{\cdot}} i$ のように別の記号にしておいても, 結局 $a \mathbin{\hat{+}} b \mathbin{\hat{\cdot}} i = a+bi$ になることも導けました.

最後に

あなたが理系を志す人であるならば,
　定義 $\cdots$ そもそも複素数とは何か？どういう演算を複素数同士のかけ算と呼ぶことに決めたのか？
　公理 $\cdots$ どんな性質だけを最初から認めた世界の話をしているのか？
　定理 $\cdots$ 定義や公理からどんな新しい性質が導けるのか？
を意識して学ぶ習慣をつけないと, より難解で抽象度の高い学問を学ぶときに必ずつまずきます.
数理科学専門塾 phi-φは, こういった自力では気づきにくい意識作りを重視しています.