問) $x>0$ のとき, $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ の値域を求めよ.

解) $x>0,\ \dfrac{1}{x}>0$ なので相加相乗平均の不等式より $f(x)\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$ であり,
$x=1$ のとき等号が成り立つので, $f(x)$ の値域は $f(x)\geqq 2$

上の答案の不備が分かりますか？

上の解答で言えているのは

「$f(x)$ がとる値の中で一番小さいのは 2 だ」

であって

「$f(x)$ は 2 以上の値の範囲をくまなく動く」

ではないのです.

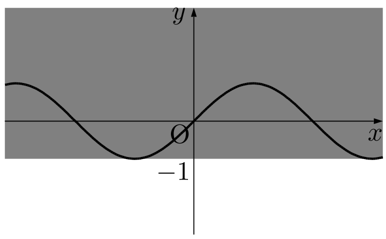
もっと単純な例で考えてみましょう.
例えば $f(x)=\sin x$ に対して

「全ての実数 x に対して $f(x)\geqq -1$」

はもちろん正しいですが, かといって

「$f(x)$ の値域は $f(x)\geqq -1$」

は全くの嘘ですよね.



論証の Point

関数 f の値域がある範囲 W だと述べたい場合は

「f は W の中に入っている」

では不十分であり

「f は W 内をくまなく動く」

まで論証できているかが重要なのです.

(修正) $x>0,\ \dfrac{1}{x}>0$ なので相加相乗平均の不等式より $f(x)\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$ であり,
$x=1$ のとき等号が成り立つ.

一方 $f(x)$ は $x>0$ において連続であり, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

2 以上の値はどんなに大きい値でもとることの根拠.

以上より $f(x)$ の値域は $f(x)\geqq 2$

【因みに $\cdots$】
同様のことが軌跡の問題についても言えます.

論証の Point

点 P の軌跡がある図形 W だと述べたい場合は

「P は W の中に入っている」

では不十分であり

「P は W 内をくまなく動く」

まで論証できているかが重要なのです.

今までこの点を強く意識して答案作りをしていたかどうかを是非振り返ってみてください.

問) 落下する水滴が, その速度に比例する抵抗を受けるものとするとき, 大きな雨粒の方が小さな雨粒より速い速度で傘にあたることを示せ.

(これは物理の運動方程式と微分方程式の知識を必要とするので一般の高校生はさらっと流し読みしてください.
ただし, 理系の大学では「これくらいできて当然だよね」って扱いをされてしまいます.)

土台の理解

質量 m の物体に力 F をくわえると, その力の向きと同じ向きに加速度 a をもって運動し, これらの値の間には

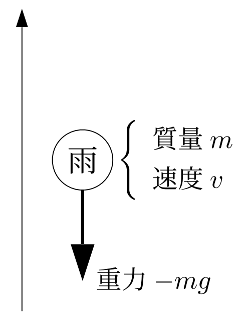
$$F = ma$$

という関係が成り立ちます.
これを『運動方程式』と呼び, ニュートンがまとめ上げたこの法則が, この世界の物体の運動を支配しているのです.

物体の運動を追いかけるためにはその物体にどんな力がはたらいているか (上式の F) を調べることが重要です.

Step1 【設定】

雨粒の質量を m とし, 鉛直上向きをプラスの向きとします.
(つまり上に動いているなら速度はプラス. 下に動いているなら速度はマイナス)



Step2 【はたらく力の check】

(ア) 重力は質量に比例し, その比例定数を $g(>0)$ とします.
必ず下向きにはたらくので上向きプラスの設定のもとでは $-mg$ となります.

(イ) 抵抗は速度 v に比例し, その比例定数を $k(>0)$ とします.
必ず運動する向きと逆向きにはたらくので $-kv$ となります.

Step3 【運動方程式を作る】

$F = -mg - kv$ であることが分かったので, 運動方程式は

$$-mg - kv = ma$$

さらに, 加速度 a とは速度 v の時間微分なので $a = \dfrac{dv}{dt}$ より

$$-mg - kv = m\frac{dv}{dt} \cdots ☆$$

$m,\ g,\ k$ は定数であり, 変化するのは t と v のみ.
つまり雨粒はこの式の時刻 t と速度 v の関係を満たしながら運動するのである.

Step4 【解く】

☆を満たす v と t の関係を, 数学の技術を駆使して手に入れることを「微分方程式を解く」と言います.
まず変数を分離することにより

$$☆ \iff -\left(v + \frac{mg}{k}\right) = \frac{m}{k} \cdot \frac{dv}{dt} \iff -dt = \frac{m}{k} \cdot \frac{1}{v + \dfrac{mg}{k}} dv$$

次に両辺を積分することにより

$$-\int dt = \frac{m}{k} \int \frac{1}{v + \dfrac{mg}{k}} dv \iff -t = \frac{m}{k} \log\left| v + \frac{mg}{k} \right| + C_1 \quad (C_1 \text{は定数})$$

$$\iff v = -\frac{mg}{k} + C_2 e^{-\frac{k}{m}t} \quad \left(\pm e^{-\frac{kC_1}{m}} \text{を} C_2 \text{とおきなおした} \right)$$

以上より, 雨粒の速度 v を時刻 t の関数として表すことができました.

Step5 【雨粒の終端速度を考える】

さて, 雨粒が傘にあたるときの速度を考えましょう. t が大きくなればなるほど $e^{-\frac{k}{m}t}$ はものすごい速さで 0 に近づいていき, 我々に届く頃にはほとんど気にならない値になりますから, ずるいと思うかもしれませんが思い切って $t \to \infty$ としてしまいましょう. つまり落ちてくるまでに雨粒の速度は

$$\lim_{t \to \infty} v = -\frac{mg}{k}$$

という定数 (下向きだから当然マイナス) に落ち着くわけです. これを「終端速度」と呼びます.

いよいよ大きい雨粒と小さな雨粒の比較です. 以上の議論により, 終端速度は質量 m に比例するという結果を得たので, 大きい (重い) 雨粒は小さな (軽い) 雨粒よりも速い速度で傘にあたるということが示されました.

Final Step 【$+\alpha$ の理解】

実生活において, $t \to \infty$ のとき v が一定値に収束することは経験的に分かると思いますが (そうでなければ, 約 10 km 上空から降ってくる雨の速度は傘を突き破る速度に達します), そのとき加速度は $\dfrac{dv}{dt} \fallingdotseq 0$ となり, ☆において $-mg - kv \fallingdotseq 0$ から終端速度が $v \fallingdotseq -\dfrac{mg}{k}$ であるということが, ☆を解くことなく予測できるのです.